**Modelo Matemático Otimizado de Seleção de Matérias**

**Lorena Couto C. Melo1, Matheus Santana2, Marcos Vinicio3**

1Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
 Ouro Preto – MG – Brasil

matheus.spc@aluno.ufop.edu.br, marcos.euzebio@aluno.ufop.edu.br, lorena.melo@aluno.ufop.edu.br

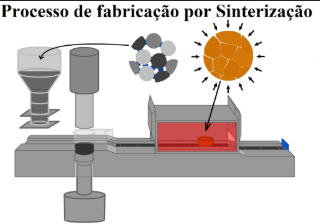
***Abstrato.*** *Este artigo descreve um modelo matemático para seleção de matérias primas para a sinterização em uma siderúrgica. O principal foco do artigo alvo, segundo Raimundo et al. (2024), é aprimorar o tempo de produção e a qualidade do sínter produzido.*

***Resumo.*** *O texto busca em seu conjunto reduzir a soma de inconsistências químicas dos componentes de cada pacote, ou seja, refinar a seleção de matérias primas nas siderúrgicas para a produção do sínter, fruto da sinterização. Para isso foi desenvolvido um modelo matemático otimizado binário no* IBM ILOG CPLEX Optimization Studio.

**PALAVRAS CHAVE. Otimização, Desvio padrão, Sinterização.**

**1. Entendimento do Problema**

O problema central reside na produção do sínter, um produto do processo de sinterização de matérias-primas em siderúrgicas. Nesse processo, partículas sólidas são separadas, inseridas na máquina, compactadas no formato desejado e submetidas a altas temperaturas (sempre abaixo do ponto de fusão). Essa etapa modifica o material sem alterar seu estado físico, resultando em sua solidificação.

Este estudo visa aprimorar o desenvolvimento do sínter por meio da otimização do processo de blendagem. A blendagem, que consiste na seleção da quantidade de matéria-prima a ser inserida em cada pacote, frequentemente resulta na perda de qualidade do produto. Além disso, consome uma quantidade significativa de tempo do programador, que realiza adaptações constantes no sistema em busca de uma combinação viável para a fabricação do sínter.

**Figura 1.** Ilustração do processo de sinterização.

Para garantir uma produção eficiente, o processo de blendagem deve ser otimizado para minimizar a dispersão dos elementos químicos entre os diferentes pacotes. A falta de uniformidade na distribuição desses elementos pode comprometer a qualidade do produto final, gerando inconsistências em suas propriedades físicas e químicas. Portanto, é fundamental ajustar a etapa de blendagem para reduzir essas variações, assegurando maior homogeneidade e confiabilidade no material obtido.

Com esse objetivo, foi utilizado um código implementado no **CPLEX**, ferramenta de programação matemática voltada à resolução de problemas de otimização. O modelo desenvolvido busca **minimizar a soma dos desvios máximos** dos elementos químicos presentes em cada pacote, de forma a reduzir as diferenças de concentração entre eles.

Para isso, foram definidas variáveis que representam a quantidade, em quilogramas (kg), da matéria-prima {i} no pacote {j}, uma variável binária que indica se a matéria-prima {i} está ou não presente em determinado pacote, além de uma variável que quantifica o desvio máximo observado. A partir dessas definições, o CPLEX foi capaz de estruturar um vetor para cada matéria-prima, no qual sua alocação binária determina como deve ser realizada a distribuição no sistema, possibilitando alcançar um arranjo mais equilibrado e eficiente.

## 2. Modelo Matemático

Antes de entrar no modelo matemático propriamente dito, faremos uma explicação dos conjuntos, parâmetros e variáveis que ele utiliza:

**Tabela 1.** Conjuntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Parâmetros e Variáveis** | **Descrição** |
|  | Matérias-primas para o processo de sinterização. |
|  | Elementos químicos para composição do sínter. |
|  | Quantidade de pacotes a ser fabricados. |

**Tabela 2.** Variáveis.

|  |  |
| --- | --- |
| **Parâmetros e Variáveis** | **Descrição** |
|  | Quantidade de estoque da matéria-prima *i*. |
|  | Composição química do elemento químico *j* na matéria-prima *i*. |
|  | Limite inferior e superior da concentração do elemento químico *i*. |
| *LIb e LSb* | Limites inferior e superior da balança. |
| *LIp e LSp* | Limites inferior e superior do pacote. |
|  | Quantidade máxima de tipos de elemento químico permitidos por pacote. |
|  | Quantidade, em kg, de matéria prima i no pacote j. |
|  | Assume o valor 1 (um) se a matéria-prima i é atribuída ao pacote j, e assume valor 0 (zero) caso contrário. |
|  | Desvio máximo do elemento químico k. |
|  | Peso do pacote j. |
|  | Quantidade do elemento químico i no pacote j. |

### 

### 2.1. Função Objetivo

|  |
| --- |
|  |

A função objetivo busca minimizar a soma dos desvios máximos de cada elemento químico; insistindo no ponto apresentado anteriormente na seção 1 deste documento, a ideia é reduzir ao máximo a diferença de quantidade, em quilogramas, do mesmo elemento químico entre diferentes pacotes.

#### 

#### 2.1.1 Restrição 1

|  |
| --- |
|  |

#### Assegura que o peso total de cada pacote esteja dentro de um intervalo preestabelecido. O limite inferior evita que sejam formados pacotes com massa insuficiente, enquanto o limite superior impede a geração de pacotes excessivamente pesados. Dessa forma, garante-se a padronização e a adequação operacional da produção.

#### 2.1.2 Restrição 2

|  |
| --- |
|  |

#### Estabelece a relação entre a variável contínua , que representa a quantidade da matéria-prima no pacote , e a variável binária , que indica se a matéria-prima está presente no pacote. Quando , força-se ​, ou seja, a matéria-prima não é utilizada. Quando , a quantidade deve respeitar os limites da balança, compreendidos entre e . Essa técnica, conhecida como Big-M, garante consistência lógica entre a seleção e a quantidade alocada.

#### 2.1.3 Restrição 3

|  |
| --- |
|  |

#### Limita-se a diversidade de matérias-primas em cada pacote. Essa condição é necessária, pois misturas com grande número de insumos podem aumentar a complexidade operacional e dificultar o controle de qualidade. Ao impor um limite, o modelo assegura maior simplicidade e viabilidade prática na blendagem.

#### 2.1.4 Restrições 4

|  |
| --- |
|  |

#### Garante que a concentração de cada elemento químico em cada pacote esteja dentro da faixa aceitável de operação. O limite inferior previne deficiência de determinado elemento, enquanto o limite superior evita excesso, que poderia comprometer as propriedades físicas e químicas do sínter. Essa restrição é essencial para manter a qualidade do produto final.

#### 2.1.5 Restrição 5

|  |
| --- |
|  |

Essa restrição assegura que a variável auxiliar represente corretamente a **maior diferença na quantidade do elemento químico entre quaisquer dois pacotes**. Como a função objetivo busca minimizar a soma desses desvios, o modelo é forçado a reduzir as diferenças, promovendo uniformidade química entre os pacotes produzidos.

#### 2.1.6 Restrição 6

|  |
| --- |
|  |

## Garante que a quantidade total utilizada de cada matéria-prima não ultrapasse o estoque disponível. Trata-se de uma restrição prática, pois reflete a disponibilidade real de recursos da siderúrgica, evitando que a solução proposta seja inviável na prática.

## 3. Descrição das instâncias

### 3.1. Estoque

**Tabela 3.** Estoque total de cada matéria-prima.

|  |  |
| --- | --- |
| Matéria-prima | Estoque (kg) |
| Areia | 1.000.000 |
| Bauxita | 1.000.000 |
| Braunita | 200.000 |
| Brucita | 1.000.000 |
| Calcita | 500.000 |
| Corindon | 1.000.000 |
| Dolomita | 500.000 |
| Goethita | 3.000.000 |
| Hematita | 3.000.000 |
| Itabirito | 3.000.000 |
| Magnesita | 1.000.000 |
| Magnetita | 3.000.000 |
| Pirolusita | 1.000.000 |
| Quartzo | 1.000.000 |
| Rhodocrosita | 300.000 |

### 3.2. Composição Química

**Tabela 4.** Composição química (%) de cada elemento químico.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Matéria-prima | SiO2 | CaO | MgO | Fe | Al2O3 | Mn |
| Areia | 95 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Bauxita | 10 | 0 | 0 | 5 | 50 | 0 |
| Braunita | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 60 |
| Brucita | 0 | 0 | 69 | 0 | 0 | 0 |
| Calcita | 5 | 50 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Corindon | 0 | 0 | 0 | 0 | 99 | 0 |
| Dolomita | 0 | 0 | 30 | 0 | 22 | 0 |
| Goethita | 0 | 0 | 0 | 63 | 0 | 0 |
| Hematita | 0 | 0 | 0 | 70 | 0 | 0 |
| Itabirito | 10 | 0 | 5 | 60 | 5 | 0 |
| Magnesita | 0 | 0 | 48 | 0 | 0 | 0 |
| Magnetita | 0 | 0 | 0 | 72 | 0 | 0 |
| Pirolusita | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 63 |
| Quartzo | 99 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Rhodocrosita | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 47 |

### 3.3. Limites de Concentração

**Tabela 5.** Limites de concentração (%) para cada elemento químico.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Elemento Químico | Limite Inferior | Limite Superior |
| SiO2 | 4 | 9 |
| CaO | 2 | 8 |
| MgO | 1 | 3 |
| Fe | 55 | 65 |
| Al2O3 | 0,5 | 2 |
| Mn | 0,2 | 2 |

### 3.4. Limites de Peso

**Tabela 6.** Limites inferior e superior de massa (kg) da balança.

|  |  |
| --- | --- |
| Limite Inferior (LIb) | Limite Superior (LSb) |
| 100.000 | 5.000.000 |

**Tabela 7.** Limites inferior e superior de massa (kg) do pacote.

|  |  |
| --- | --- |
| Limite Inferior (LIp) | Limite Superior (LSp) |
| 3.000.000 | 8.500.000 |

### 3.5. Máximo de matérias-primas

**Tabela 8.** Quantidade máxima de tipos de elemento químico permitidos por pacote.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5 |

**4. Resultados**

### 4.1. Simulação para 3 pacotes

**Tabela 9.** Receita para otimizar a produção de 3 pacotes.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Pacote 1** | **Pacote 2** | **Pacote 3** |
| Areia | 0 | 0 | 0 |
| Bauxita | 0 | 0 | 0 |
| Braunita | 0 | 0 | 0 |
| Brucita | 0 | 0 | 0 |
| Calcita | 166520 | 166520 | 166520 |
| Corindon | 0 | 0 | 0 |
| Dolomita | 0 | 0 | 0 |
| Goethita | 3000000 | 0 | 0 |
| Hematita | 0 | 0 | 2700000 |
| Itabirito | 666080 | 666080 | 666080 |
| Magnesita | 0 | 0 | 0 |
| Magnetita | 0 | 2625000 | 0 |
| Pirolusita | 120250 | 120250 | 120250 |
| Quartzo | 210140 | 210140 | 210140 |
| Rhodocrosita | 0 | 0 | 0 |
| Peso Total do Pacote | 4162990 | 3787990 | 3862990 |

**Tabela 10.** Análise de qualidade para a produção de 3 pacotes.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Pacote 1 | Pacote 2 | Pacote 3 | Média (%) | Variância (VAR.P) | Desvio Padrão (DP %) |
| SiO2 | 6,7973 | 7,4703 | 7,3252 | 7,1976 | 0,0836 | 0,2892 |
| CaO | 2 | 2,198 | 2,1553 | 2,1178 | 0,0072 | 0,0851 |
| MgO | 1 | 1,099 | 1,0777 | 1,0589 | 0,0018 | 0,0425 |
| Fe | 55,0001 | 60,4449 | 59,2714 | 58,2388 | 5,4742 | 2,3397 |
| Al2O3 | 0,8 | 0,8792 | 0,8621 | 0,8471 | 0,0012 | 0,034 |
| Mn | 1,8198 | 1,9999 | 1,9611 | 1,9269 | 0,006 | 0,0774 |

### 4.2. Simulação para 4 pacotes

**Tabela 11.** Receita para otimizar a produção de 4 pacotes.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Pacote 1** | **Pacote 2** | **Pacote 3** | **Pacote 4** |
| Areia | 122750 | 122750 | 0 | 0 |
| Bauxita | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Braunita | 0 | 0 | 100000 | 100000 |
| Brucita | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Calcita | 123770 | 123770 | 126230 | 126230 |
| Corindon | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Dolomita | 172140 | 172140 | 0 | 0 |
| Goethita | 0 | 0 | 1272300 | 1177100 |
| Hematita | 0 | 2523800 | 476220 | 0 |
| Itabirito | 0 | 0 | 1054900 | 1054900 |
| Magnesita | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Magnetita | 2453700 | 0 | 0 | 546320 |
| Pirolusita | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Quartzo | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Rhodocrosita | 127660 | 127660 | 0 | 0 |
| Peso Total do Pacote | 3000020 | 3070120 | 3029650 | 3004550 |

**Tabela 12.** Análise de qualidade para a produção de 4 pacotes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Pacote 1 | Pacote 2 | Pacote 3 | Pacote 4 | Média (%) | Variância (VAR.P) | Desvio Padrão (DP %) |
| SiO2 | 4,0933 | 3,9999 | 4,0533 | 4,0872 | 4,0584 | 0,0014 | 0,0371 |
| CaO | 2,1037 | 2,0557 | 2,0832 | 2,1006 | 2,0858 | 0,0004 | 0,0191 |
| MgO | 1,9686 | 1,9236 | 1,9493 | 1,9656 | 1,9518 | 0,0003 | 0,0178 |
| Fe | 58,9293 | 57,5837 | 58,3514 | 58,8395 | 58,426 | 0,2849 | 0,5337 |
| Al2O3 | 1,3033 | 1,2735 | 1,741 | 1,7555 | 1,5183 | 0,053 | 0,2302 |
| Mn | 2 | 1,9543 | 1,9804 | 1,997 | 1,9829 | 0,0003 | 0,0181 |

### 4.3. Simulação para 5 pacotes

**Tabela 13.** Receita para otimizar a produção de 5 pacotes.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Pacote 1** | **Pacote 2** | **Pacote 3** | **Pacote 4** | **Pacote 5** |
| Areia | 252690 | 102990 | 252690 | 188560 | 146240 |
| Bauxita | 100000 | 0 | 100000 | 0 | 100000 |
| Braunita | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Brucita | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Calcita | 100000 | 100000 | 100000 | 100000 | 100000 |
| Corindon | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Dolomita | 0 | 0 | 0 | 132770 | 0 |
| Goethita | 0 | 1025400 | 0 | 0 | 1974600 |
| Hematita | 2141600 | 0 | 0 | 858400 | 0 |
| Itabirito | 149460 | 1671600 | 149460 | 858680 | 170750 |
| Magnesita | 156250 | 0 | 156250 | 0 | 156250 |
| Magnetita | 0 | 0 | 2113900 | 733930 | 152130 |
| Pirolusita | 100000 | 100000 | 0 | 0 | 100000 |
| Quartzo | 0 | 0 | 0 | 0 | 100000 |
| Rhodocrosita | 0 | 0 | 127660 | 127660 | 0 |
| Peso Total do Pacote | 3000000 | 2999990 | 2999960 | 3000000 | 2999970 |

**Tabela 14.** Análise de qualidade para a produção de 5 pacotes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Pacote 1 | Pacote 2 | Pacote 3 | Pacote 4 | Pacote 5 | Média (%) | Variância (VAR.P) | Desvio Padrão (DP %) |
| SiO2 | 9 | 9 | 9,0002 | 9 | 9,0002 | 9,0001 | 0 | 0,0001 |
| CaO | 1,7509 | 1,701 | 1,7509 | 1,7295 | 1,7154 | 1,7296 | 0,0004 | 0,0196 |
| MgO | 3 | 2,987 | 3 | 2,9884 | 3 | 2,9951 | 0 | 0,0061 |
| Fe | 53,2108 | 54,9999 | 53,9744 | 54,8801 | 48,7486 | 53,1628 | 5,294 | 2,3009 |
| Al2O3 | 2 | 2,8203 | 2 | 2,4676 | 2 | 2,2576 | 0,112 | 0,3346 |
| Mn | 2,1 | 2,1 | 2 | 2 | 2,1 | 2,06 | 0,0024 | 0,049 |

### 5. Comparação com modelo matemático de Raimundo et al. (2024)

De acordo com o artigo, tem-se a seguinte função objetivo:

O modelo proposto por Raimundo et al. (2024) tem como função objetivo a minimização da soma dos desvios padrão das dispersões químicas dos elementos presentes em cada pacote. Além disso, os autores impõem restrições explícitas que limitam o desvio padrão de cada elemento a no máximo 2%, assegurando rigoroso controle estatístico da variabilidade química entre pacotes. Essa abordagem confere maior precisão na uniformização da composição, porém gera um modelo de caráter **não linear**, pois o **desvio padrão** **envolve** **operações quadráticas e não lineares** (média, variância, raiz quadrada), cuja resolução apresenta elevada complexidade computacional. Como destacado pelos autores, “para as instâncias com 5 e 6 pacotes, soluções factíveis são encontradas em até uma hora de execução, sem a certeza da otimalidade”.

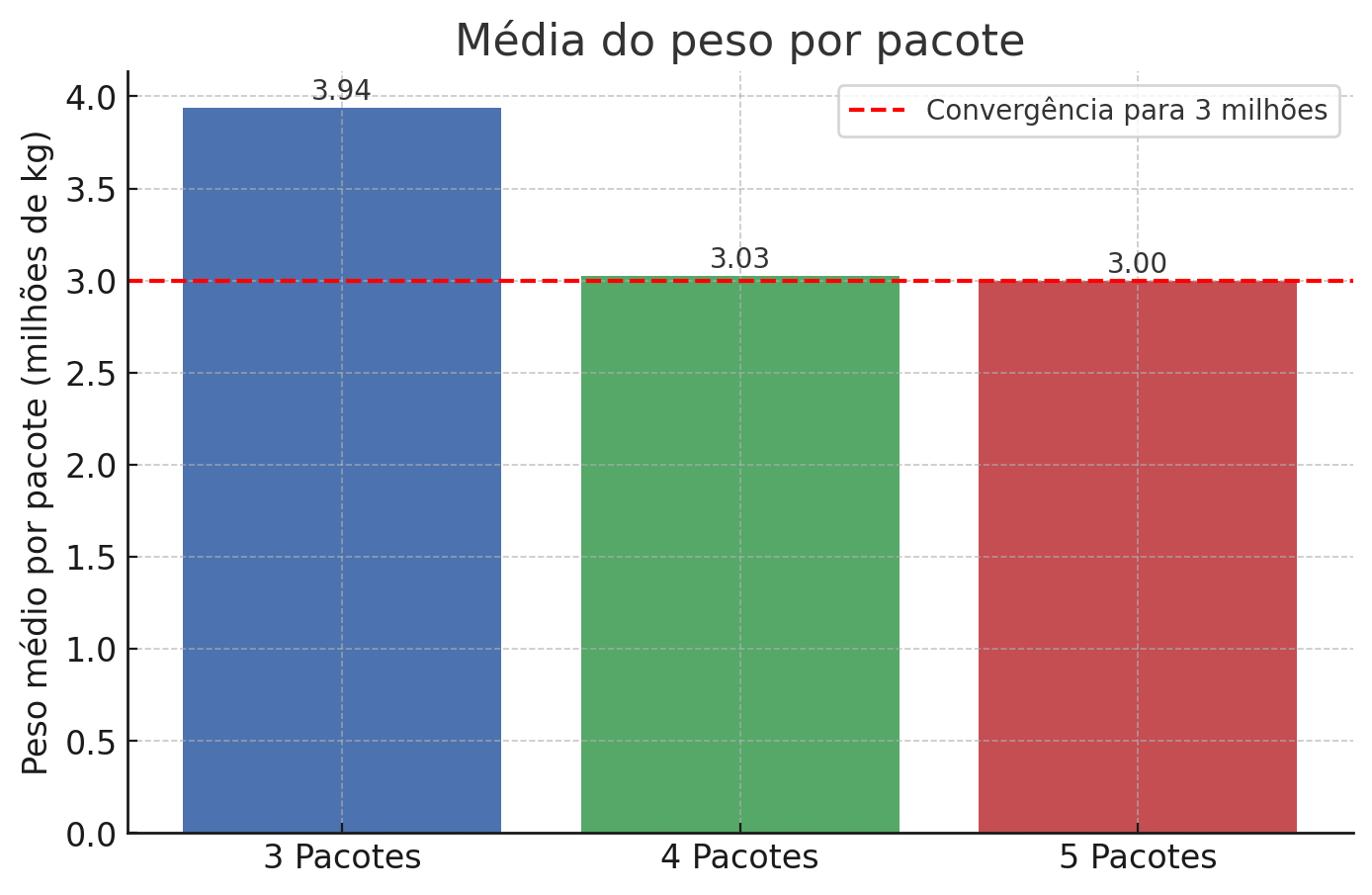
No presente trabalho, optou-se por uma formulação alternativa: a função objetivo foi definida como a **minimização da soma dos desvios máximos entre pacotes**. Essa escolha simplifica a modelagem, uma vez que o desvio máximo pode ser expresso de forma linear por meio de restrições que limitam a diferença entre as quantidades de um mesmo elemento em diferentes pacotes. Diferentemente do desvio padrão, que requer operações quadráticas e cálculo de raiz quadrada, o desvio máximo pode ser diretamente tratado pelo solver de otimização, resultando em maior eficiência e menor tempo de execução.

### 6. Conclusão

Observou-se que, para o elemento ferro (Fe), em alguns cenários o desvio padrão ultrapassou o limite de 2% indicado no artigo original. Apesar disso, tais valores ainda podem ser considerados aceitáveis no contexto prático, uma vez que o ferro representa o componente majoritário na composição do sínter e pequenas variações não comprometem significativamente a qualidade do produto final.

Desvio padrão do Fe para:

* 3 pacotes = 2,3397
* 4 pacotes = 0,5337
* 5 pacotes = 2,3009

Outra análise realizada refere-se ao peso total dos pacotes. Conforme destacado no artigo original, os valores convergem para 3 milhões de quilogramas em cada pacote, comportamento também observado em nossas simulações. Esse resultado evidencia a consistência do modelo em respeitar os limites operacionais definidos, assegurando que cada pacote seja produzido dentro da faixa estipulada e, ao mesmo tempo, mantendo a uniformidade da distribuição das matérias-primas.

Dessa forma, a utilização do desvio máximo, apesar de ser uma medida mais simples, mostrou-se adequada para capturar a variabilidade entre pacotes e ao mesmo tempo viabilizar a resolução do modelo em instâncias de maior porte.

Código disponível em: <https://github.com/matheus-santana1/Modelo-Matematico-Otimizado-de-Selecao-de-Materias>

**7. Referências**

Raimundo, G. R., Tedesco, C. R. de O., Shiguemoto, G. H. B., & Shiguemoto, A. L. (2024) Modelo matemático para seleção de matérias-primas em siderúrgicas. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Fortaleza, CE.